

# Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wasserwellen

Projektpraktikumsgruppe 5:

Andreas Schwabe  
Carolin Rödel  
Christiane Wagner  
Friedrich Heberlein  
Sebastian Bauerschmidt  
Tobias Bierlein

Tutor: Holger Rupp

23. Januar 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation und Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Allgemeine Wellentheorie . . . . .	3
2.2	Schwerewellen . . . . .	4
2.3	Seichtwasserwellen . . . . .	5
2.4	Kapillarwellen . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1	Aufbau . . . . .	6
3.2	Durchführung . . . . .	7
3.2.1	Parameteraufnahme . . . . .	7
3.2.2	Messung . . . . .	7
3.2.3	Bildauswertung . . . . .	8
3.2.4	Videoauswertung . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Messungen und Tabellen</b>	<b>10</b>
4.1	Testmessung . . . . .	10
4.2	Messung 1: Wasser . . . . .	11
4.3	Messung 2: Wasser (Füllhöhe verändert) . . . . .	12
4.4	Messung 3: Wasser (Excenterlänge reduziert) . . . . .	14
4.5	Messung 4: Wasser (wie Messung 2) . . . . .	15
4.6	Messung 5: Wasser mit Seife . . . . .	17
4.7	Messung 6: Rapsöl . . . . .	18
4.8	Messung 7: Rapsöl (Excenterlänge erhöht) . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>21</b>
5.1	Fehlerquellen . . . . .	21
5.2	Vergleich der Messergebnisse . . . . .	22
5.2.1	Füllhöhe . . . . .	22
5.2.2	Verschiedene Excenterlängen . . . . .	23
5.2.3	Einfluss der Oberflächenspannung . . . . .	23
5.2.4	Unabhängigkeit vom Medium . . . . .	24
5.3	Fehlerrechnung . . . . .	24
5.4	Vergleich zum Theoriewert . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>26</b>

# 1 Motivation und Ziel

Kaum ein Phänomen in der Natur ist so offensichtlich und gibt doch so viele Rätsel auf. Betrachtet man nur einen Bach fallen einem auf Anhieb viele Eigenschaften der Wellen auf, die man sich einbildet sofort zu verstehen. Taucht man den Finger ins Wasser breiten sich kreisförmige Wellen aus, an einem großen Stein verebben die Wellen. Doch dauert es meist nicht lange bis man an der Komplexität des Systems scheitert. So einfach und durchsichtig wie auch einzelne Phänomene erscheinen mögen so kompliziert und undurchschaubar wird schon das Gesamterscheinungsbild des Wellenverlaufs den nur ein einzelner Ast auf der Wasseroberfläche hervorruft.

In diesem Sinne ist es uns natürlich bewußt, dass es nicht annähernd möglich ist in einem (zweiwöchigen) Projekt ein solch komplexes System zu verstehen. Die einzige Möglichkeit sich an dieses Thema heranzuwagen scheint deshalb das Herausgreifen eines einzelnen Phänomens zu sein. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle ist etwas sehr anschauliches! Wie diese Größe allerdings von Eigenschaften wie der Frequenz, der Wellenlänge oder der Flüssigkeit selbst abhängt geht über den Erfahrungshorizont hinaus.

Konkret wollen wir in unserem Projekt untersuchen welchen Einfluss die Frequenz des Wellenerregers auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen hat. Um die Dispersionsrelation für Schwerewellen nachzuprüfen wollen wir außerdem noch untersuchen, wie sich eine Veränderung der Wasserhöhe auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit auswirkt und was passiert wenn wir ein anderes Medium verwenden. Neben Wasser wollen wir ein Medium mit anderer Oberflächenspannung (Wasser mit Seife) und ein Medium mit anderer Dichte (Rapsöl) verwenden.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Allgemeine Wellentheorie

Prinzipiell kann jede Welle durch eine Wellengleichung beschrieben werden. Diese Wellengleichung gibt eine Beziehung zwischen der zweiten Orts- und der einer Zeitableitung an.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Der Faktor der vor der Ortsableitung steht setzt sich aus Größen zusammen die, die für die Ausbreitungsart der Welle verantwortlichen Eigenschaften das Mediums charakterisieren. Etwa im Fall einer Seilwelle gilt:

$$a^2 = c^2; c = \text{Phasengeschwindigkeit der Welle}$$

Die Bewegungsgleichung von Wasserwellen und deren exakte Lösungen sind jedoch sehr kompliziert, deshalb soll hier wie in vielen Lehrbüchern wichtige Eigenschaften von Wasserwellen ohne eine Behandlung der Wellengleichung dargestellt werden.

Für jede Art von mechanischen Wellen benötigt es (wie bei einem harmonischen Oszillator) eine rücktreibende Kraft, die, im Fall von Wasserwellen, eine Glättung der Oberfläche anstrebt. „Einerseits versucht die Schwerkraft die Wellen einzuebnen, um die Gravitationsenergie zu vermindern, und gleichzeitig ist auch die Oberflächenspannung bestrebt die

Wellen zu glätten, um die vergrößerte Oberfläche und damit erhöhte Oberflächenenergie einer Wasserwelle zu verkleinern“ [2, S.284]. Der Einfluß der Oberflächenspannung ist eine Konsequenz daraus, dass sich die Wasserwellen die wir untersuchen immer an der Grenzfläche zwischen zwei Medien (Wasser und Luft) abspielen.

Besonders wichtig für unsere Untersuchungen ist, dass auch für Wasserwellen folgende Beziehung gilt (wobei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit und  $\lambda$  die Wellenlänge und  $f$  die Frequenz der Welle ist):

$$c = f\lambda$$

Kennt man die Wellenlänge und weiß man, wieviele Wellenberge in der Sekunde an einem vorbeilaufen, kann man also daraus direkt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle bestimmen [2, S. 283f]

## 2.2 Schwerewellen

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (Phasengeschwindigkeit  $c$ ) ist aber völlig verschieden von der Teilchengeschwindigkeit  $v$  der einzelnen Wassermoleküle. Während sich die Wellenberge und Täler konstant fortbewegen bleiben die einzelnen Wassermoleküle beinahe am gleichen Ort. Sie bewegen sich „nahezu auf Kreisbahnen“ [2, S. 283].



Bewegung der Wasserteilchen in einer Welle; die dargestellte Welle bewegt sich nach links  
Quelle des Bildes: [3]

Anhand dieser Beobachtung wollen wir nun die Dispersionsrelation von Schwerewellen herleiten [1, S. 198]. Dabei gehen wir von einem Beobachter aus der sich auf einem Wellenberg mit der Welle mitbewegt. Ist  $v$  die Teilchengeschwindigkeit so bewegen sich die Wasserteilchen auf dem Wellenberg mit der Geschwindigkeit  $c-v$  an ihm vorbei die Teilchen im Tal hingegen bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $c+v$  relativ zu ihm (vgl. Abbildung der kreisförmigen Wasserteilchenbewegung). Somit haben die Teilchen im Tal eine höhere kinetische Energie

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}m(c+v)^2 - \frac{1}{2}m(c-v)^2 = 2mcv \quad (\text{m: Masse der betrachteten Wasserportion})$$

Diese Energie muss gleich der potentiellen Energie sein die die Teilchen auf den Wellenbergen im Vergleich zu denen im Wellental besitzen:

$$2mgh = 2mcv \Rightarrow v = \frac{gh}{c} \quad (\text{h: Wellenamplitude})$$

$v$  ist also die Geschwindigkeit der einzelnen Wasserteilchen. Somit ergibt sich für die kreisförmige Wasserteilchenbewegung, wie sie ein ruhender Beobachter am Gewässerrand sieht, folgende Umlaufgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$\omega = \frac{v}{h} = \frac{g}{c}$$

mit  $\omega = 2\pi f$  und  $f = \frac{c}{\lambda}$  ergibt sich die Dispersionrelation für Schwerewellen:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

Somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schwerewellen nur von ihrer Wellenlänge abhängig. Die Dichte des Mediums hat keinen Einfluss auf  $c$ .

Mit dieser kreisenden Bewegung der Wasserteilchen ergibt sich für das Profil der Welle eine „Trochide“ [1, S. 198]. Die Täler einer solchen Tiefwasserwelle sind also breiter als die Berge. Nur bei kleiner Amplitude ähnelt das Profil einem Sinus. Dies ist auch ein anschaulicher Grund dafür warum eine Behandlung der Wellengleichung und deren Lösung relativ kompliziert ist.

## 2.3 Seichtwasserwellen

Die Kreise, die die einzelnen Teilchen in einer Wasserwelle beschreiben werden kleiner, wenn man sie in größeren Tiefen beobachtet. „Die Bewegungsamplitude, d.h. der Kreisradius  $r$ , ist direkt an der Oberfläche am größten und nimmt mit der Tiefe deutlich ab. Die Bewegungsamplitude beträgt zum Beispiel in einer Tiefe von einem Viertel der Wellenlänge nur noch etwa die Hälfte wie an der Wasseroberfläche“ [2, S. 283]. Ist die Wassertiefe geringer als  $\frac{\lambda}{2\pi}$ , so kann die Teilchenbewegung nicht ungestört ablaufen und es kommt in der Nähe des Grundes zu elliptischen, knapp über dem Grund zu strichartigen Teilchenbewegungen, was die Phasengeschwindigkeit folgendermaßen beeinflusst.

Für Wassertiefen  $H$ , die wesentlich kleiner als  $\frac{\lambda}{2\pi}$  sind, setzt man  $c = \sqrt{g \cdot H}$ . Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt folglich nur von der Wassertiefe  $H$  ab und ist unabhängig von der Wellenlänge, d.h. es gibt keine Dispersion wie bei elektromagnetischen Wellen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist also in diesem Bereich direkt von der Wassertiefe abhängig.

Diese Formel zeigt auch, dass sich bei Wellen mit hoher Amplitude, wenn die Wellenberge und Wassertiefe vergleichbar groß sind, sich die Wellenberge schneller fortbewegen können als die Wellentäler. Dadurch verformen sich die Wellen sehr stark, in der Natur kann es so zur Bildung von Schockwellenfronten, z.B. Brandung oder Tsunamis kommen.

Die Wasserhöhe in unserem Versuch ist größer als  $\frac{\lambda}{2\pi}$ , dennoch wäre es sehr ungenau näherungsweise mit der Formel für quasi unendliche Wassertiefe (also der Dispersionsformel von Schwerewellen) zu rechnen. Für die Theoriekurve der Dispersion haben wir eine Formel verwendet die den Seichtwasserwellencharakter in die Dispersionformel für Schwerewellen mit einrechnet.

$$c^2 = \frac{g \cdot \lambda}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}\right); [3]$$

Für große Wasserhöhen  $h$  (im Vergleich zu kleinen Wellenlängen  $\lambda$ ) geht der  $\tanh$  gegen eins.

## 2.4 Kapillarwellen

Bei dieser Wellenart handelt es sich um Wellen mit sehr kurzen Wellenlängen, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  weniger von der Schwerkraft abhängt, als von der Oberflächenspannung des betreffenden Mediums:

$$c^2 = \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}$$

mit  $\rho$ : Dichte  $\sigma$ : Oberflächenspannung

Ab einer bestimmten Wellenlänge überwiegt der Schwerwellencharakter. Der Übergang von Kapillarwellen zu Schwerwellen erfolgt dort, „wo sich die beiden Dispersionskurven  $c(\lambda)$  treffen“ [1, S. 199], also bei:

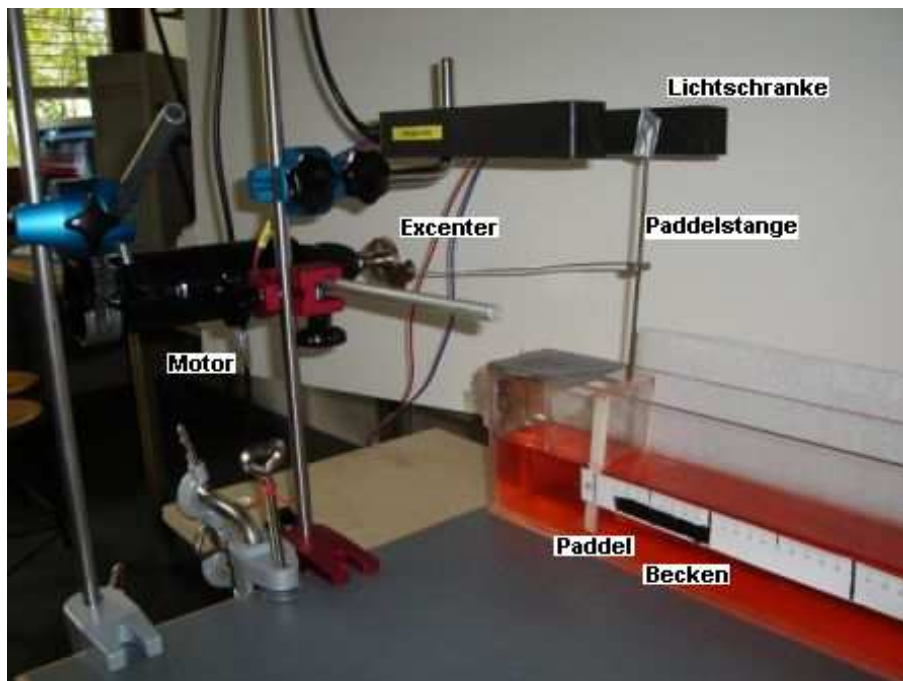
$$c_{kap} = c_{schwer}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{übergang}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

Für Wasser mit einer Oberflächenspannung von 0,07N/m ergibt sich dieser Übergang bei einer Wellenlänge von ca. 1,7cm. An der Formel für die Dispersion von Flachwasserwellen kann man erkennen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Es handelt sich hier also im Gegensatz zu Schwerwellen um eine anormale Dispersion.

### 3 Versuchsaufbau und Durchführung

#### 3.1 Aufbau



In diesem Versuch beobachten wir die Ausbreitung von Wellen in verschiedene Medien: Wasser, Wasser mit Spülmittel und Rapsöl (Dichte ca. 0,86kg/l).

Das Behältnis besteht aus Plexiglas mit den Maßen (140/6/13)cm. Die effektive Länge beträgt jedoch nur 130 cm. Diese Länge ist ausreichend um Interferenzen zu vermeiden, so dass die am Ende der Wanne reflektierten Wasserwellen nahezu keinen Einfluss auf unsere Versuchsergebnisse haben.

Zudem verwendeten wir, vor allem bei Wellen mit großen Wellenlängen, einen Wellenbrecher um dieses Phänomen zu vermeiden. Außerdem ist die Wanne hoch genug um, bei

geeigneter Befüllung, Flachwasserwellen zu umgehen.

Das Becken wird in Richtung der Ausbreitung der Wellen beleuchtet und das Wasser jeweils mit roter Farbe eingefärbt, damit man die Wellen besser erkennen kann.

Die Wellen werden durch einen regelbaren 12 V Motor erzeugt, der durch eine variable Excenterstange mit dem Paddel verbunden ist. Dieses war jedoch nicht so breit wie die Wanne und der Spalt an der Seite erzeugte Verwirbelungen im Becken. Deshalb passten wir es durch Ankleben von Styropor genau ein, was die Wellenform sichtlich verbesserte. Die Excenterlänge ist variabel, damit man die Auslenkung des Paddels einstellen kann um die Wellenamplitude zu verändern.

Durch eine Lichtschranke am oberen Ende des Paddels konnten wir mithilfe eines Cassy-Moduls in Direktverbindung zum PC die Periodendauer aufnehmen und daraus die Frequenz  $f = \frac{1}{T}$  bestimmen.

Die Spannung des Motors wurde ebenfalls direkt vom Computer aus gesteuert. Damit wollten wir gewährleisten, dass bei allen Versuchen jeweils die gleichen Frequenzen erreicht werden.

Zur genauen Bestimmung der Wellengeschwindigkeit verwendeten wir zwei Methoden die bei der Durchführung näher erläutert werden.

## 3.2 Durchführung

### 3.2.1 Parameteraufnahme

Zu Beginn jeder Messung haben wir die Parameter des Versuchsaufbaus aufgenommen. Wichtig dabei waren vor allem die Werte, die bei den unterschiedlichen Messungen verändert wurden, d.h. die Länge der Excenterstange, die Excenterauslenkung, die Füllhöhe und das Medium.

Nach der Aufnahme aller wichtigen Daten konnten wir die Messung beginnen. Dazu vergewisserten wir uns zunächst noch, dass die Paddelstange nach Justierung des Excenters die Lichtschranke bei maximaler Auslenkung noch ausreichend verdeckt, so dass ein Impuls ausgelöst wird.

### 3.2.2 Messung

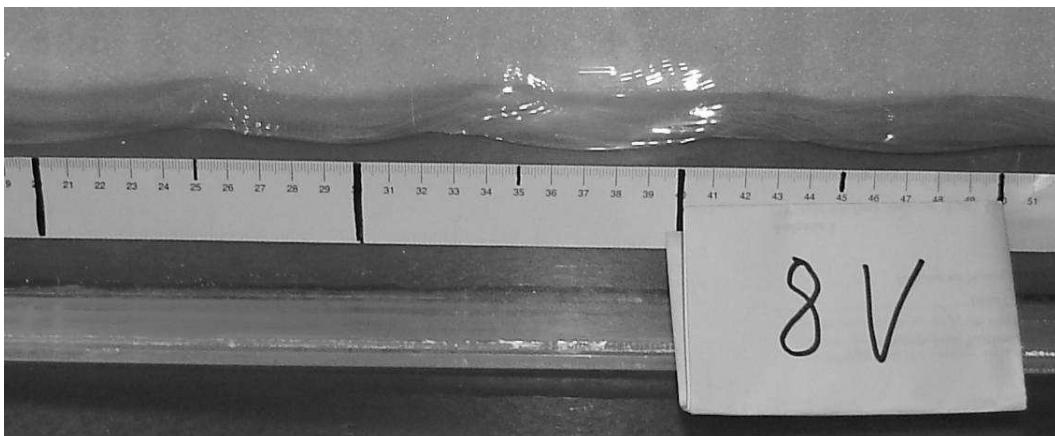
Die Messungen starteten immer bei einer Motorspannung von 4V und wurden in Schritten von 0,5V bis zu einem Wert von 10V erhöht. Nach Wahl der gewünschten Spannung über die Cassy-Steuerung haben wir kurz gewartet bis sich eine gleichmäßige Wellenausbreitung im Becken eingestellt hat. Zusätzlich wurde auch die eingestellte Spannung auf ein Papierschild geschrieben, das vor das Wellenbecken gestellt wurde, um später den Wert auch im Video und in den Bildern ablesen zu können. Jetzt konnten wir die durch die Lichtschranke aufgenommene Periodendauer  $T$  in unser Versuchsprotokoll aufnehmen. Gleichzeitig haben wir mit der Digitalkamera jeweils ein Video von etwa drei Sekunden Länge und zwei Bilder aufgenommen. Der Abstand der Kamera betrug bei langen Wellen ca. 1m und wurde bei kurzen Wellenlängen bis auf ungefähr 40cm reduziert, damit bei der geringeren Ausbreitungslänge und den kleineren Wellenbergen noch auswertbare Videos erzeugt werden konnten. Danach wurde die Spannung um weitere 0,5V erhöht um danach genauso wie zuvor zu verfahren.

### 3.2.3 Bildauswertung

Nachdem die ganze Messreihe durchgeführt war haben wir das Bild- und Videomaterial auf unseren Computer übertragen und mit der Bildauswertung begonnen, indem wir die Bilder mit IrfanView öffneten um daraus die Wellenlänge abzulesen. Bei großen Wellenlängen haben wir jeweils die Werte  $(x_{start}, x_{ende})$  für zwei aufeinanderfolgende Wellentäler auf der angeklebten Skala am Becken abgelesen und ins Protokoll eingetragen, bei kurzen Wellenlängen konnte meistens die Werte für zwei Wellenberge aufgrund der veränderten Wellenform besser gemessen werden. Aus Anfangs- und Endpunkt der Wellen konnte dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit über folgende Formel berechnet werden.

$$c_{bild} = \frac{x_{ende} - x_{start}}{T}$$

Ein Beispiel für ein Messbild (es wurde wegen der Seitengestaltung bereits zugeschnitten).



### 3.2.4 Videoauswertung

Bei der Videoauswertung wurden die einzelnen Videos in VirtualDub geöffnet und ausgewertet. Dazu betrachteten wir ähnlich wie bei der Bildauswertung bei größeren Wellenlängen die Wellentäler bzw. bei kurzen Wellenlängen die Wellenberge. Dabei betrachteten wir zunächst ein gut sichtbares Wellental / einen gut sichtbaren Wellenberg kurz hinter dem Erreger und laßen wie vorher die Position an der Skala ab  $(x_{start})$ . Zusätzlich notieren wir auch die von VirtualDub angezeigte Videozeit  $(t_{start})$ . So konnten wir die Welle Frame für Frame im Becken weiterverfolgen und ein Stück später erneut die Werte für Ort  $(x_{ende})$  und Zeit  $(t_{ende})$  des gleichen Wellenberges/-tales aufnehmen. Dieser Vorgang wurde für jede Spannungseinstellung wiederholt und anschließend die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen mit der folgenden Formel berechnet

$$c_{video} = \frac{x_{ende} - x_{start}}{t_{ende} - t_{start}}$$

Jetzt konnten wir einen Mittelwert  $c_{mittel} = (c_{bild} + c_{video})/2$  bilden und die Ergebnisse in einem f-c-Diagramm auftragen.



## 4 Messungen und Tabellen

### 4.1 Testmessung

Um unsere Apparatur zu testen und um die Aufnahmebedingungen für die Kamera (Abstand, Winkel, Beleuchtung) herauszufinden, haben wir zunächst eine Testmessung durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Messung sind hier aufgeführt, fließen jedoch nicht in die Auswertung ein.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
15mm	88mm	65mm	Leitungswasser

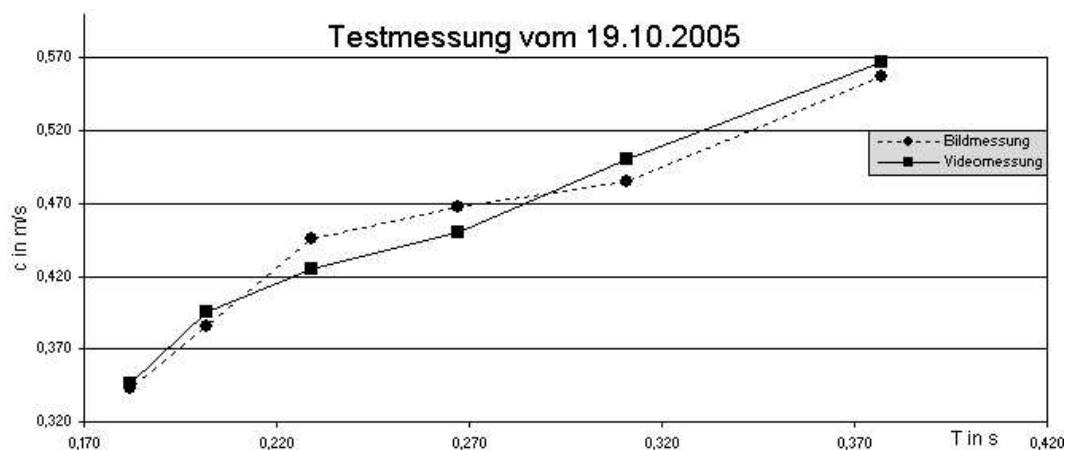
Es folgt der Test für die Bildmessung.

Bildmessung				
VNr	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	5	0,377	210	0,557
2	6	0,311	151	0,486
3	7	0,267	125	0,468
4	8	0,229	102	0,445
5	9	0,202	78	0,386
6	10	0,182	63	0,343

Es folgt der Test für die Videomessung.

Videomessung				
$t_{start}$ in $10^{-2}$ s	$t_{ende}$ in $10^{-2}$ s	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s
0,13	0,43	160	330	0,567
3,17	3,60	150	365	0,500
0,37	0,83	198	405	0,450
3,70	4,17	150	350	0,426
0,43	0,67	155	250	0,396
0,00	0,13	135	180	0,346

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Periodendauer ist in folgendem Diagramm dargestellt (Separate Graphen für Video- und Bildmessung).



## 4.2 Messung 1: Wasser

Dies erste Messung wurde mit dem Medium Wasser durchgeführt.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
15mm	88mm	65mm	Leitungswasser

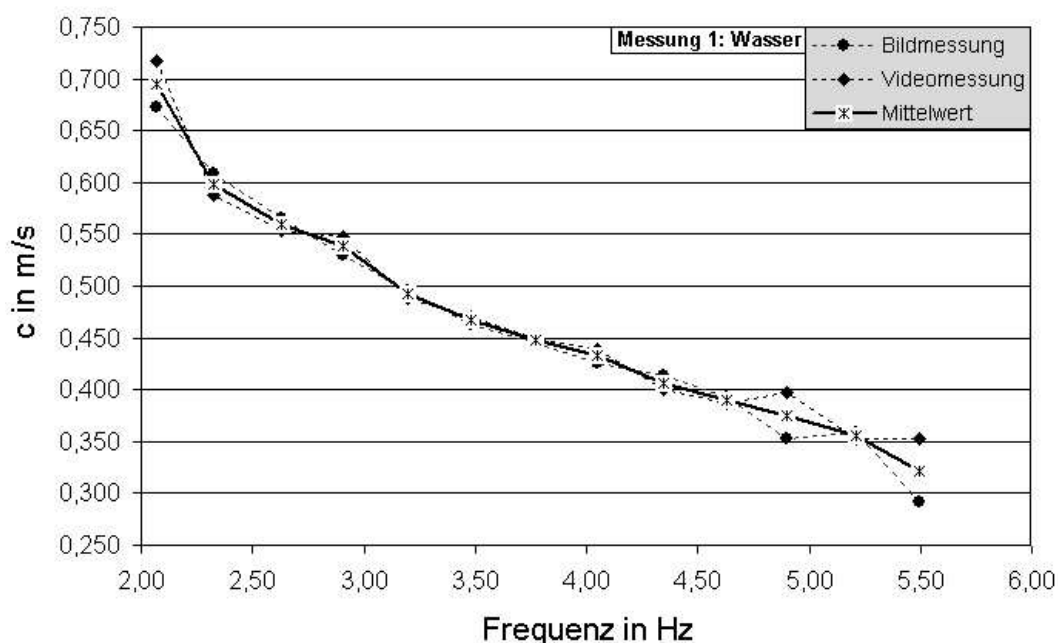
Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Bildmethode.

Bildmessung							
Vnr.	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$f$ in Hz	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	4,0	0,483	2,07	105	430	325	0,673
2	4,5	0,430	2,33	268	530	262	0,609
3	5,0	0,380	2,63	110	325	215	0,566
4	5,5	0,344	2,91	223	405	182	0,529
5	6,0	0,313	3,19	230	385	155	0,495
6	6,5	0,287	3,48	210	343	133	0,463
7	7,0	0,265	3,77	260	378	118	0,445
8	7,5	0,247	4,05	200	305	105	0,425
9	8,0	0,230	4,35	180	275	95	0,413
10	8,5	0,216	4,63	215	300	85	0,394
11	9,0	0,204	4,90	314	386	72	0,353
12	9,5	0,192	5,21	201	270	69	0,359
13	10,0	0,182	5,49	225	278	53	0,291

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Videomethode.

Videomessung					
$t_{start}$ in $10^{-2}$ s	$x_{start}$ in mm	$t_{ende}$ in $10^{-2}$ s	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s	$c_{mittel}$ in m/s
413	295	443	510	0,72	0,69
26	200	60	400	0,59	0,6
43	220	80	425	0,55	0,56
40	135	93	425	0,55	0,54
223	160	267	375	0,49	0,49
0	155	50	390	0,47	0,47
7	117	57	342	0,45	0,45
0	117	53	350	0,44	0,43
3	139	67	395	0,40	0,41
0	155	37	298	0,39	0,39
130	110	167	257	0,40	0,38
23	152	57	272	0,35	0,36
147	115	183	242	0,35	0,32

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz ist in folgendem Diagramm dargestellt.



### 4.3 Messung 2: Wasser (Füllhöhe verändert)

In der zweiten Messreihe haben wir die Füllhöhe unseres Becken um 1cm erhöht, um eine mögliche Abhängigkeit von der Wassertiefe herauszufinden.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
15mm	88mm	75mm	Leitungswasser

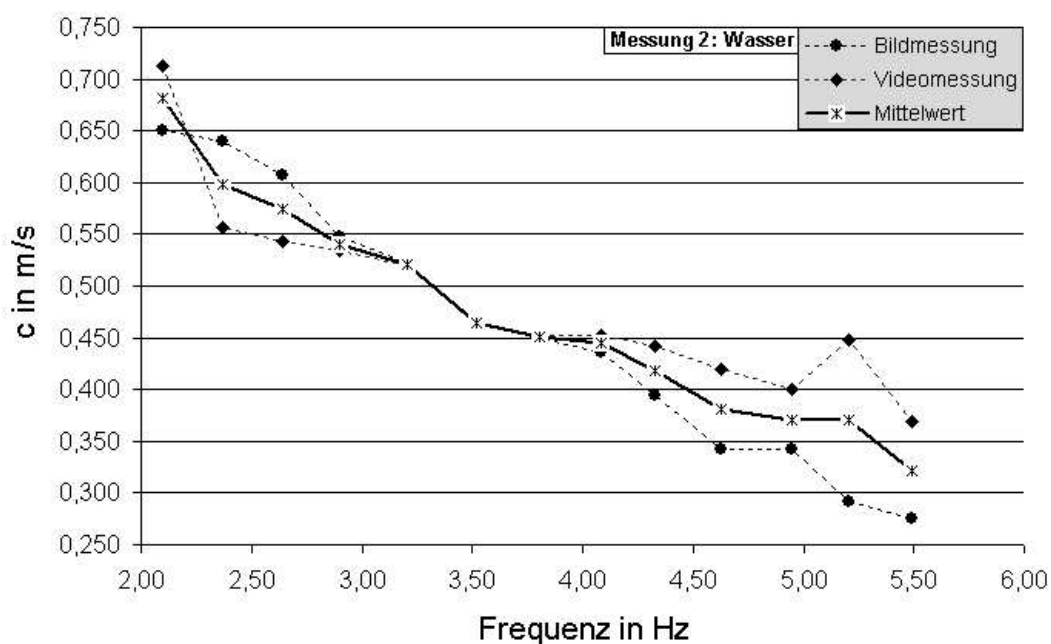
Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Bildmethode.

Bildmessung							
Vnr.	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$f$ in Hz	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	4,0	0,477	2,10	185	495	310	0,650
2	4,5	0,422	2,37	150	420	270	0,640
3	5,0	0,379	2,64	230	460	230	0,607
4	5,5	0,345	2,90	88	277	189	0,548
5	6,0	0,312	3,21	135	298	163	0,522
6	6,5	0,284	3,52	192	324	132	0,465
7	7,0	0,263	3,80	164	282	118	0,449
8	7,5	0,245	4,08	313	420	107	0,437
9	8,0	0,231	4,33	255	346	91	0,394
10	8,5	0,216	4,63	258	332	74	0,343
11	9,0	0,202	4,95	224	293	69	0,342
12	9,5	0,192	5,21	280	336	56	0,292
13	10,0	0,182	5,49	250	300	50	0,275

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Videomethode.

Videomessung					
$t_{start}$ in $10^{-2}s$	$x_{start}$ in mm	$t_{ende}$ in $10^{-2}s$	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s	$c_{mittel}$ in m/s
130	210	170	495	0,71	0,68
267	145	320	440	0,56	0,60
297	142	350	430	0,54	0,58
23	135	73	402	0,53	0,54
0	135	53	410	0,52	0,52
73	100	127	350	0,46	0,46
0	105	53	345	0,45	0,45
40	105	93	345	0,45	0,44
17	105	77	370	0,44	0,42
57	100	107	310	0,42	0,38
0	100	50	300	0,40	0,37
7	105	40	253	0,45	0,37
3	105	60	315	0,37	0,32

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz ist in folgendem Diagramm dargestellt.



#### 4.4 Messung 3: Wasser (Excenterlänge reduziert)

Um die eventuelle Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Amplitude des Wellenerzeugers zu untersuchen, haben wir die Excenterlänge von 15mm auf 10mm reduziert.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
10mm	88mm	75mm	Leitungswasser

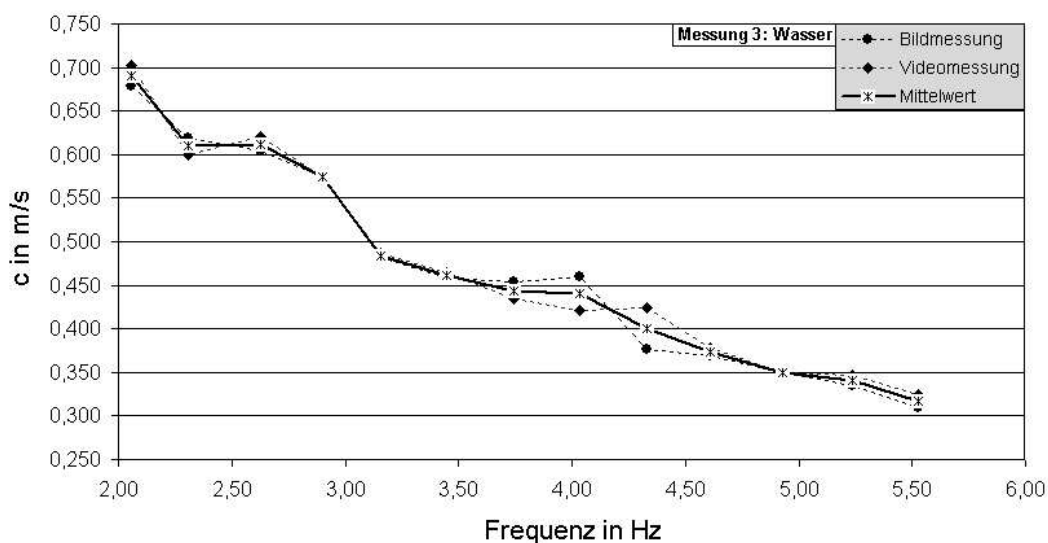
Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Bildmethode.

Bildmessung							
Vnr.	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$f$ in Hz	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	4,0	0,486	2,058	125	455	330	0,679
2	4,5	0,433	2,309	292	560	268	0,619
3	5,0	0,381	2,625	120	350	230	0,604
4	5,5	0,345	2,899	150	348	198	0,574
5	6,0	0,317	3,155	185	338	153	0,483
6	6,5	0,290	3,448	275	408	133	0,459
7	7,0	0,267	3,745	319	440	121	0,453
8	7,5	0,248	4,032	300	414	114	0,460
9	8,0	0,231	4,329	295	382	87	0,377
10	8,5	0,217	4,608	262	342	80	0,369
11	9,0	0,203	4,926	246	317	71	0,350
12	9,5	0,191	5,236	218	282	64	0,335
13	10,0	0,181	5,525	217	273	56	0,309

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Videomethode.

Videomessung					
$t_{start}$ in $10^{-2}$ s	$x_{start}$ in mm	$t_{ende}$ in $10^{-2}$ s	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s	$c_{mittel}$ in m/s
40	110	87	440	0,70	0,69
17	115	67	415	0,60	0,61
7	100	57	410	0,62	0,61
13	195	67	505	0,57	0,57
30	203	87	480	0,49	0,48
3	150	60	415	0,46	0,46
13	215	67	450	0,44	0,44
13	200	70	440	0,42	0,44
47	195	93	390	0,42	0,40
27	200	80	400	0,38	0,37
30	195	90	405	0,35	0,35
10	203	53	352	0,35	0,34
23	205	83	400	0,33	0,32

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz ist in folgendem Diagramm dargestellt.



#### 4.5 Messung 4: Wasser (wie Messung 2)

Da die Messung (2) starke Abweichung zwischen Bild- und Videomessung zeigte, wiederholten wir den Versuch bei gleich Bedingungen.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
15mm	88mm	75mm	Leitungswasser

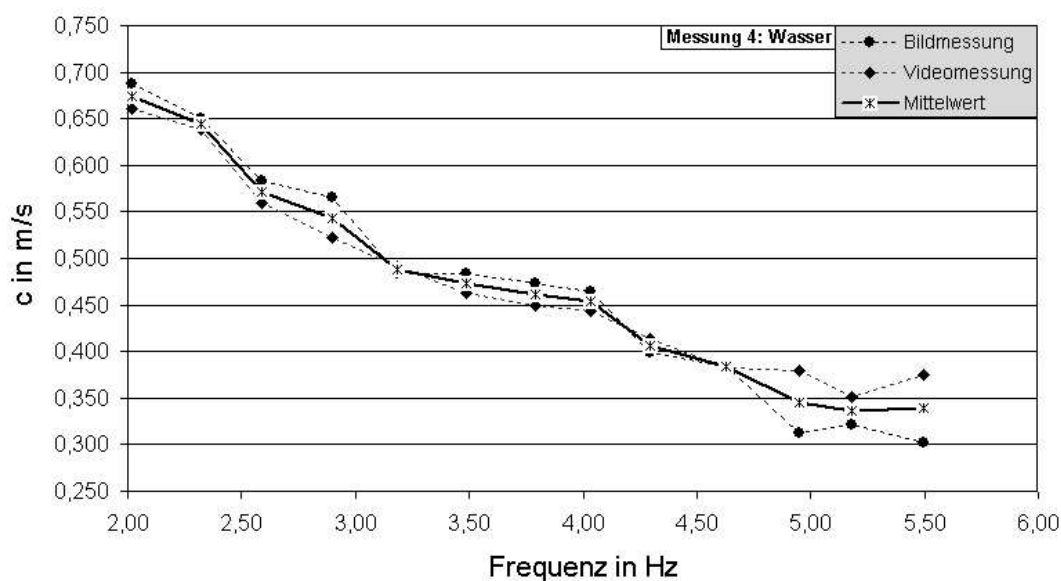
Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Bildmethode.

Bildmessung							
Vnr.	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$f$ in Hz	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	4,0	0,495	2,020	460	800	340	0,687
2	4,5	0,431	2,320	465	745	280	0,650
3	5,0	0,386	2,591	490	715	225	0,583
4	5,5	0,345	2,899	205	400	195	0,565
5	6,0	0,314	3,185	398	550	152	0,484
6	6,5	0,287	3,484	616	755	139	0,484
7	7,0	0,264	3,788	310	435	125	0,473
8	7,5	0,248	4,032	375	490	115	0,464
9	8,0	0,233	4,292	365	458	93	0,399
10	8,5	0,216	4,630	235	318	83	0,384
11	9,0	0,202	4,950	349	412	63	0,312
12	9,5	0,193	5,181	268	330	62	0,321
13	10,0	0,182	5,495	290	345	55	0,302

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Videomethode.

Videomessung					
$t_{start}$ in $10^{-2}s$	$x_{start}$ in mm	$t_{ende}$ in $10^{-2}s$	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s	$c_{mittel}$ in m/s
230	300	283	650	0,660	0,67
13	200	60	500	0,638	0,64
7	220	57	500	0,560	0,57
13	150	80	500	0,522	0,54
17	155	77	450	0,492	0,49
13	200	80	510	0,463	0,47
13	145	93	505	0,450	0,46
27	150	107	505	0,444	0,45
20	200	90	490	0,414	0,41
10	205	87	500	0,383	0,38
70	210	120	400	0,380	0,35
20	160	57	290	0,351	0,34
13	100	53	250	0,375	0,34

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz ist in folgendem Diagramm dargestellt.



#### 4.6 Messung 5: Wasser mit Seife

Für dieser Messreihe geben wir zu dem Leitungswasser etwas Flüssigseife hinzu. Dabei wird Oberflächenspannung herabgesetzt werden um Unabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen von der Oberflächenspannung nachzuweisen.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
15mm	88mm	75mm	Seifenwasser

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Bildmethode.

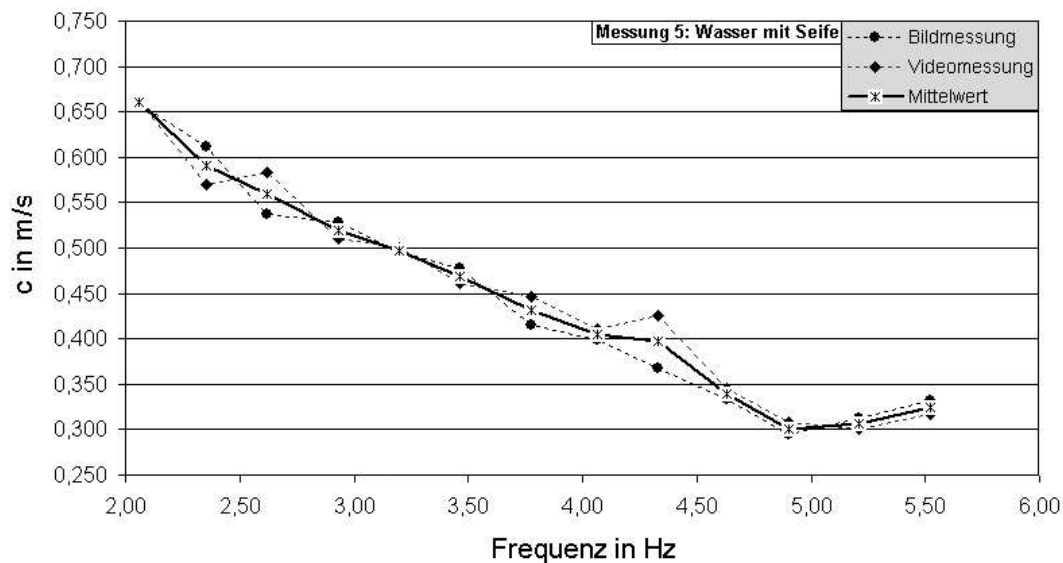
Bildmessung							
Vnr.	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$f$ in Hz	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	4,0	0,485	2,062	350	670	320	0,660
2	4,5	0,425	2,353	460	720	260	0,612
3	5,0	0,382	2,618	360	565	205	0,537
4	5,5	0,341	2,933	500	680	180	0,528
5	6,0	0,313	3,195	445	600	155	0,495
6	6,5	0,289	3,460	452	590	138	0,478
7	7,0	0,265	3,774	425	535	110	0,415
8	7,5	0,246	4,065	355	453	98	0,398
9	8,0	0,231	4,329	337	422	85	0,368
10	8,5	0,216	4,630	395	467	72	0,333
11	9,0	0,204	4,902	285	345	60	0,294
12	9,5	0,192	5,208	228	288	60	0,313
13	10,0	0,181	5,525	225	285	60	0,331

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Videomethode.

Videomessung					
$t_{start}$ in $10^{-2}$ s	$x_{start}$ in mm	$t_{ende}$ in $10^{-2}$ s	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s	$c_{mittel}$ in m/s
10	300	53	585	0,663	0,661
10	300	60	585	0,570	0,591
27	300	63	510	0,583	0,560
20	320	70	575	0,510	0,519
10	210	70	510	0,500	0,498
16	200	80	495	0,461	0,469
27	205	93	500	0,447	0,431
183	300	233	505	0,410	0,404
13	200	60	400	0,426	0,397
13	353	57	505	0,345	0,339
90	305	137	450	0,309	0,301
83	300	133	450	0,300	0,306
113	105	143	200	0,317	0,324

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz ist in folgendem Diagramm dargestellt.





### 4.7 Messung 6: Rapsöl

Um das Verhalten der Ausbreitungsgeschwindigkeit in anderen Medien zu untersuchen ersetzen wir das Leitungswasser durch Rapsöl.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
15mm	84mm	70mm	Rapsöl

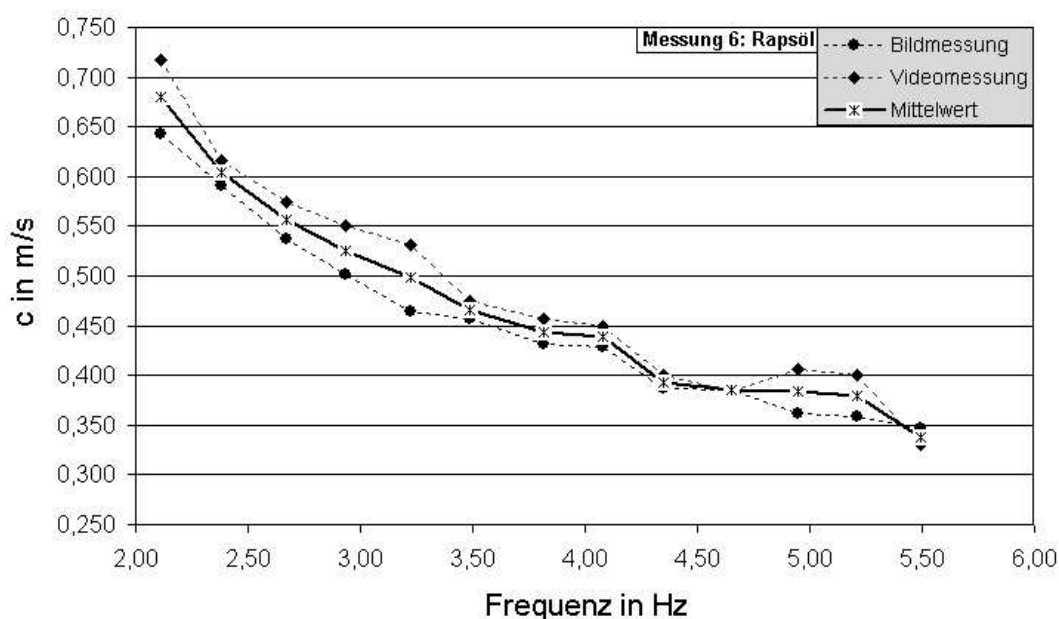
Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Bildmethode.

Bildmessung							
Vnr.	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$f$ in Hz	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	4,0	0,483	2,07	105	430	325	0,673
2	4,5	0,430	2,33	268	530	262	0,609
3	5,0	0,380	2,63	110	325	215	0,566
4	5,5	0,344	2,91	223	405	182	0,529
5	6,0	0,313	3,19	230	385	155	0,495
6	6,5	0,287	3,48	210	343	133	0,463
7	7,0	0,265	3,77	260	378	118	0,445
8	7,5	0,247	4,05	200	305	105	0,425
9	8,0	0,230	4,35	180	275	95	0,413
10	8,5	0,216	4,63	215	300	85	0,394
11	9,0	0,204	4,90	314	386	72	0,353
12	9,5	0,192	5,21	201	270	69	0,359
13	10,0	0,182	5,49	225	278	53	0,291

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Videomethode.

Videomessung					
$t_{start}$ in $10^{-2}s$	$x_{start}$ in mm	$t_{ende}$ in $10^{-2}s$	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s	$c_{mittel}$ in m/s
413	295	443	510	0,72	0,69
26	200	60	400	0,59	0,6
43	220	80	425	0,55	0,56
40	135	93	425	0,55	0,54
223	160	267	375	0,49	0,49
0	155	50	390	0,47	0,47
7	117	57	342	0,45	0,45
0	117	53	350	0,44	0,43
3	139	67	395	0,40	0,41
0	155	37	298	0,39	0,39
130	110	167	257	0,40	0,38
23	152	57	272	0,35	0,36
147	115	183	242	0,35	0,32

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz ist in folgendem Diagramm dargestellt.



#### 4.8 Messung 7: Rapsöl (Excenterlänge erhöht)

Die Messung mit dem Öl wurde nocheinmal mit einer anderen Excenterlänge durchgeführt.

Versuchsdaten			
Excenterlänge	Padelstangenlänge	Füllhöhe	Medium
23mm	84mm	70mm	Rapsöl

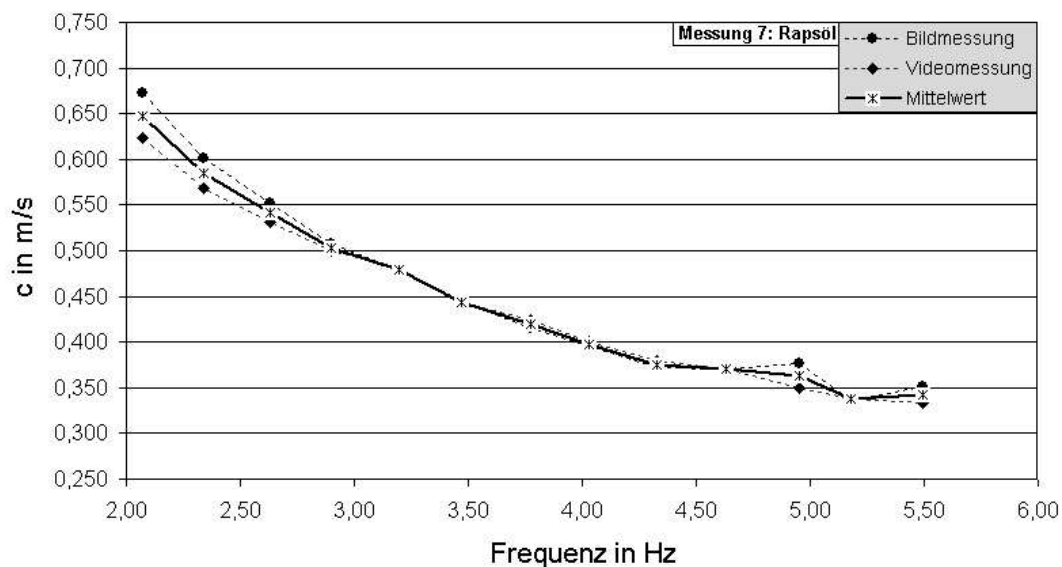
Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Bildmethode.

Bildmessung							
Vnr.	$U_{Motor}$ in V	$T$ in s	$f$ in Hz	$x_{start}$ in mm	$x_{ende}$ in mm	$\lambda$ in mm	$c$ in m/s
1	4,0	0,483	2,070	245	570	325	0,673
2	4,5	0,427	2,342	158	415	257	0,602
3	5,0	0,380	2,632	140	350	210	0,553
4	5,5	0,345	2,899	130	305	175	0,507
5	6,0	0,313	3,195	230	380	150	0,479
6	6,5	0,288	3,472	200	328	128	0,444
7	7,0	0,265	3,774	210	320	110	0,415
8	7,5	0,248	4,032	142	240	98	0,395
9	8,0	0,231	4,329	177	263	86	0,372
10	8,5	0,216	4,630	165	245	80	0,370
11	9,0	0,202	4,950	112	188	76	0,376
12	9,5	0,193	5,181	160	225	65	0,337
13	10,0	0,182	5,495	121	185	64	0,352

Es folgt die Messreihe für unsere Messung mit der Videomethode.

Videomessung					
$t_{start}$ in $10^{-2}$ s	$x_{start}$ in mm	$t_{ende}$ in $10^{-2}$ s	$x_{ende}$ in mm	$c$ in m/s	$c_{mittel}$ in m/s
63	175	120	530	0,623	0,65
13	145	57	395	0,568	0,59
3	145	50	395	0,532	0,54
17	155	67	405	0,500	0,50
30	160	80	400	0,480	0,48
27	145	80	380	0,443	0,44
7	150	53	345	0,424	0,42
10	145	50	305	0,400	0,40
17	155	50	280	0,379	0,38
13	150	40	250	0,370	0,37
7	145	37	250	0,350	0,36
3	140	37	255	0,338	0,34
13	135	40	225	0,333	0,34

Die gemessene Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz ist in folgendem Diagramm dargestellt.



## 5 Auswertung

### 5.1 Fehlerquellen

Mit unserem Versuchsaufbau war es uns mit einfachen Mitteln gelungen, Wellen zu erzeugen und diese zu untersuchen. Es ließ sich aber nicht vermeiden, dass unsere Ergebnisse durch verschiedene Faktoren geringfügig gestört wurden. Die folgenden Punkte führen die wichtigsten Störquellen auf, geben deren Einfluss auf die Messergebnisse wieder und geben eventuelle Lösungen an:

- Da das verwendete Wellenbecken eine endliche Länge besitzt, kam es besonders bei großen Wellenlängen zu Interferenzen durch Reflexion der Wellen am Beckenende. Die Folge waren stehende Wellen, wodurch eine Messung der Geschwindigkeit nicht mehr möglich war, bzw. erheblich gestört wurde. Das Problem konnten wir allerdings durch eine ca. 30cm lange Kunststoffplatte lösen, die wir am Ende des Beckens schräg in das Wasser gelegt haben, so dass die Wellen auslaufen konnten und keine Interferenzen mehr verursachten.
- Ein weiteres Problem bestand darin, dass in der Nähe des Erregers keine gleichmäßige Wellenausbreitung erreicht werden konnte, welches sich besonders bei hohen Frequenzen zeigte. Die ersten Wellenberge/-täler bei kurzen Wellenlängen standen immer noch unter dem Einfluss der Turbulenzen, die vom Erreger ausgingen. Da die Reichweite der kurzen Wellen auch nicht so weit gewesen ist wie es bei Längeren der Fall ist, konnten wir das Problem auch nicht umgehen, indem wir die Wellen weiter hinten im Becken ausmaßen. Das ist wohl auch ein Grund dafür, dass die Werte für die Bild- und Videoauswertung bei niedrigen Periodendauern divergieren.
- Mit veränderter Wellenlänge änderte sich auch gleichzeitig die Form der erzeugten Wellen. Waren Wellenberge und -täler bei niedrigen Frequenzen gleichermaßen langgestreckt und geformt, zeigte sich bei kurzen Wellenlängen, dass die Täler im Vergleich zu den Wellenbergen größer wurden. So ließen sich bei den kurzen Wellen die Positionswerte relativ gut an den spitzen Bergen ablesen ( $\pm 2mm$ ), bei den Längen war

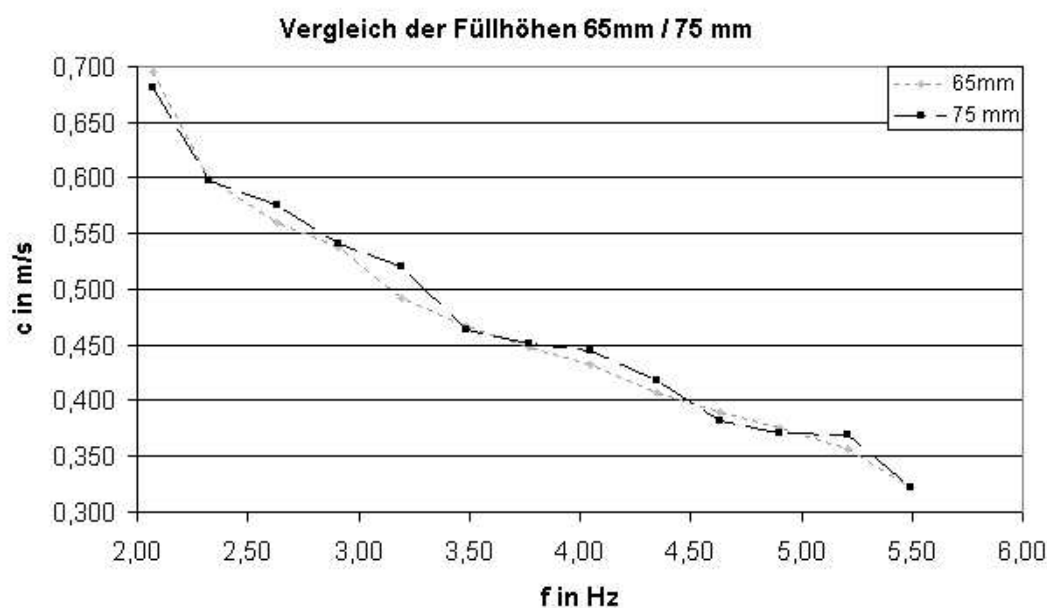
das wegen keinerlei markanter Punkte nur schwer möglich und erzeugte daher einen größeren Ablesefehler ( $\pm 3\text{mm}$ ).

- Da kein Drehzahl geregelter Motor zur Verfügung stand, konnte die Frequenz des Wellenerzeugers nur über die angelegte Spannung eingestellt werden. Das hatte zur Folge, dass die Periodendauer nicht konstant gehalten werden konnte und so immer um ca.  $\pm 50\text{ms}$  schwankte.
- Das verwendete Becken hatte eine endliche Breite von 6,0 cm, wodurch die Wellen durch Reibung abgebremst werden. Ein entscheidender Einfluss konnte allerdings nicht festgestellt werden, was auch durch Herabsetzen der Oberflächenspannung untersucht wurde.

## 5.2 Vergleich der Messergebnisse

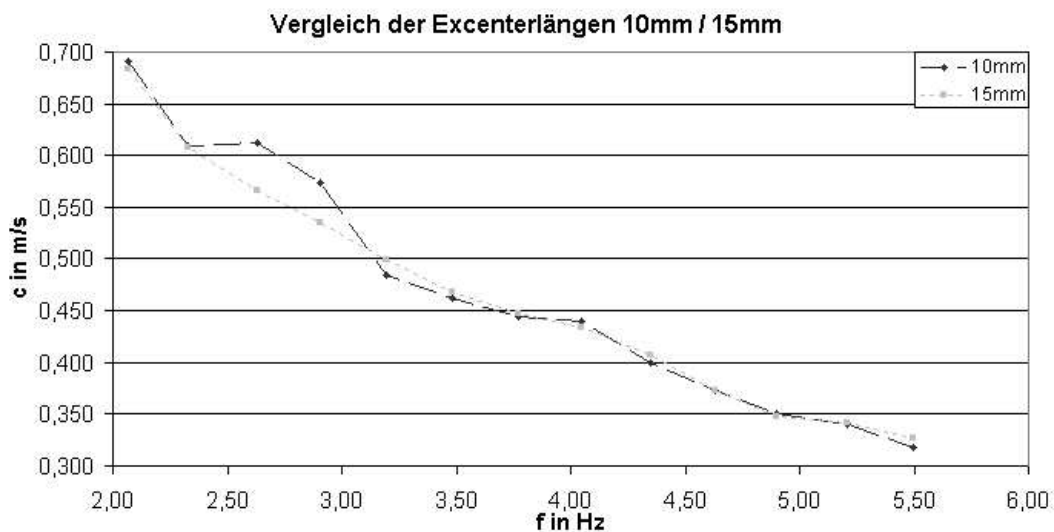
### 5.2.1 Füllhöhe

Von der ersten auf die zweite Messung änderten wir die Füllhöhe des Beckens von 6,5cm auf 7,5cm. Im folgenden Diagramm sind die Kurven der Mittelwerte aus Video- und Bildauswertung von beiden Messungen übereinander gelegt. Daran ist zu erkennen, dass die Wassertiefe in dieser Größenordnung keinen erkennbaren Einfluss auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit hat.



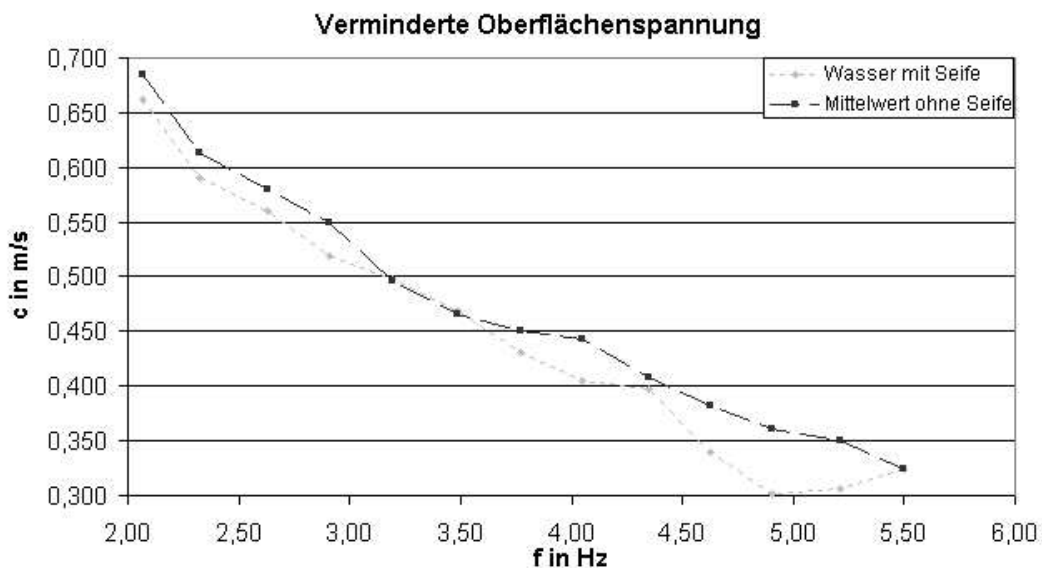
### 5.2.2 Verschiedene Excenterlängen

In der dritten Messung wurde die Excenterlänge von 15 auf 10mm verkürzt. Dass die veränderte Amplitude keinerlei Einfluss auf die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit hat, erkennt man wenn die Messkurven der Messungen mit Excenterlänge 15mm (Mittelwert der Messungen 1,2,4,5) mit der Kurve von 10mm vergleicht:



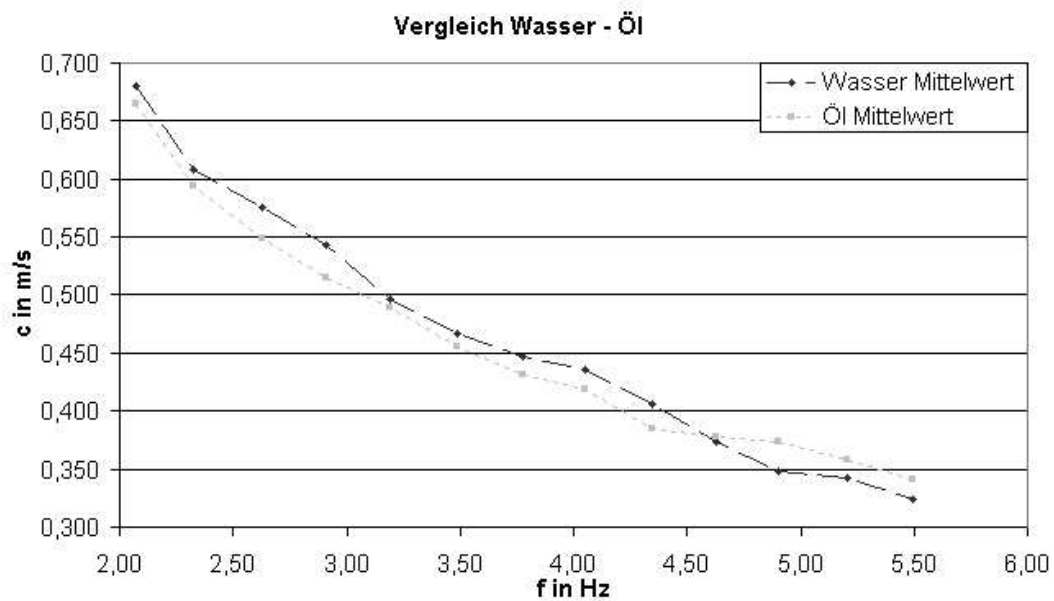
### 5.2.3 Einfluss der Oberflächenspannung

Bei der Messung mit herabgesetzter Oberflächenspannung kamen wir zum gleichen Ergebnis. Die gemessenen Wellenlängen (ca. 350mm - 50mm) liegen deutlich über 17mm wo die Grenze von Kapillar-/Schwerewellencharakter liegt und werden daher nicht von der Oberflächenspannung beeinflusst. Die Abweichungen lassen sich durch veränderte Ablesebedingungen (verändertes Anhaftverhalten zwischen Gefäßwand und Medium) zurückführen. Im folgenden Diagramm ist der Mittelwert der Messungen 1-4 und Messung Nr. 5 (herabgesetzte Oberflächenspannung) dargestellt.



### 5.2.4 Unabhängigkeit vom Medium

Zum Schluß wurde das Wasser durch Rapsöl ausgetauscht. Die gemessenen Werte bestätigten unsere Erwartungen an der Unabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen vom Medium. Das Ergebnis wurde wieder in einem Diagramm dargestellt (Mittelwerte Wasser verglichen mit Mittelwerte Öl).



### 5.3 Fehlerrechnung

Beim Messen unsere Größen sind folgende Messfehler aufgetreten:

- Fehler bei der Frequenzbestimmung:  $\Delta T = 5/100s$
- Fehler bei der Wellenlängenbestimmung:  $\Delta \lambda = 2 \cdot \Delta x = 2 \cdot 3mm = 6mm$

Der Fehler bei der Wellenlängenbestimmung muss zwei mal genommen werden, weil man einmal den Beginn und einmal das Ende der Welle abliest und jeweils nur ca. 2-3mm genau abmessen kann. Die Frequenz dagegen konnte wir mit unsere Lichtschranke recht genau bestimmen.

$$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} = \frac{x_{ende} - x_{start}}{T}$$

$$\Delta c = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \lambda} \cdot \Delta \lambda\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta c = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{T^2} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{1}{T} \cdot \Delta \lambda\right)^2}$$

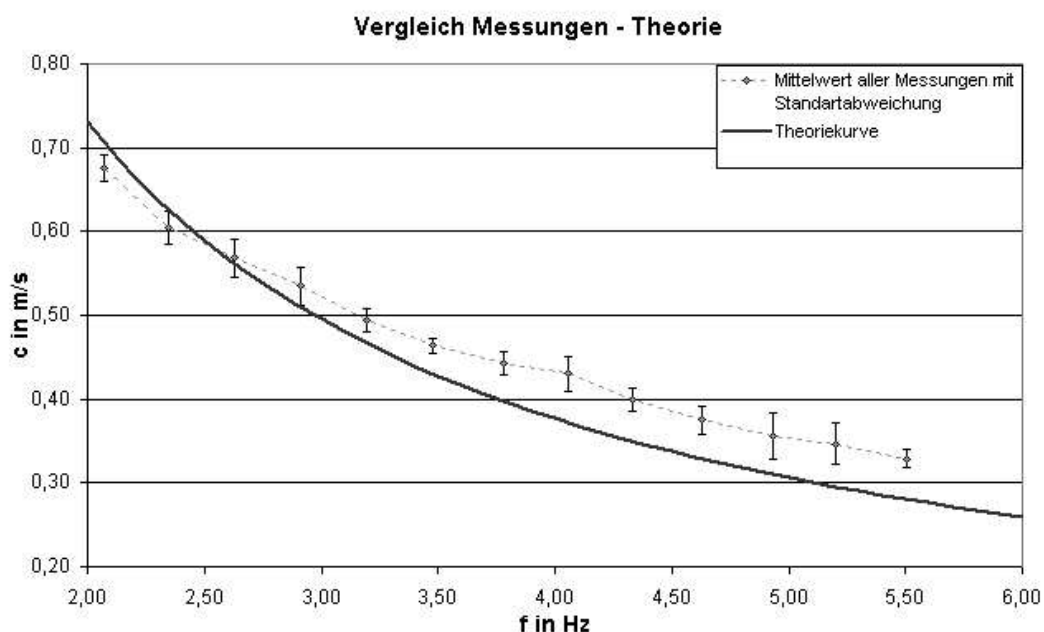
Wenn wir unsere Werte für die obige Gleichung einsetzen und die Fehler berechnen, sind diese ziemlich klein.

U in V	$\Delta\lambda \cdot \frac{1}{T}$	$\Delta T \cdot \frac{\lambda}{T^2}$	Gesamtfehler	Mittelwert c	Stdabw. c
4,0	0,0040	0,0042	0,0058	0,68	0,239
4,5	0,0037	0,0043	0,0056	0,60	0,214
5,0	0,0034	0,0045	0,0056	0,57	0,202
5,5	0,0032	0,0046	0,0056	0,54	0,190
6,0	0,0030	0,0047	0,0056	0,49	0,175
6,5	0,0028	0,0048	0,0056	0,46	0,164
7,0	0,0027	0,0050	0,0058	0,44	0,157
7,5	0,0026	0,0052	0,0058	0,43	0,153
8,0	0,0025	0,0054	0,0059	0,40	0,142
8,5	0,0024	0,0055	0,0060	0,37	0,133
9,0	0,0021	0,0052	0,0056	0,36	0,128
9,5	0,0022	0,0056	0,0060	0,35	0,125
10,0	0,0017	0,0048	0,0051	0,33	0,117

Da unsere Fehler, die wir durch Messungenauigkeiten festgestellt haben sehr viel geringer sind als die Standardabweichung, bedeutet diese für unseren Versuch, dass wir sehr starke systematische Fehler im Versuchsaufbau haben, die sich nicht durch Fehlerfortpflanzung so einfach herausfinden lassen. Wäre keine systematischen Fehler vorhanden, müsste die Standardabweichung nämlich ungefähr gleich groß dem Fehler aus der Fehlerfortpflanzung sein.

## 5.4 Vergleich zum Theoriewert

Da die einzelnen Veränderungen zwischen den verschiedenen Messungen keinen Einfluss auf die Wellengeschwindigkeit zeigten, ist es möglich einen Mittelwert zwischen allen Messungen zu bilden. Diese Werte können nun im Vergleich zu den Theoriewerten in einem Diagramm betrachtet werden.



Es ist zu erkennen, dass die gemessenen Werte leicht von der Theoriekurve abweichen. Zum einen ist die erwartete Geschwindigkeit bei kleinen Frequenzen höher, bei größeren



Frequenzen jedoch niedriger als die Gemessene.

Bei den langen Wellenlängen ist die Abweichung wohl damit zu erklären, dass wir bei einer Wassertiefe von 6,5 - 7,5cm und Wellenlängen von 350mm durchaus einen geringen Einfluss durch Seichtwasserwellen haben, welche die Ausbreitungsgeschwindigkeit bremst. Auf der anderen Seite sind die erhöhten Werte für die kurzen Wellenlängen wohl durch die Turbulenzen am Erreger verursacht worden. Wegen der kürzeren Ausbreitungslänge ist es, wie weiter oben beschrieben nur schwer möglich gewesen, die Wellen weiter entfernt vom Erregerpaddel zu beobachten.

## 6 Zusammenfassung

Durch Vergleich unserer Messungen sind wir in der Lage einige Aussagen über unsere Wellen zu machen. Die Ähnlichkeiten unserer Kurven von  $c$  in Abhängigkeit von  $f$  mit der Theoriekurve zeigen (normale Dispersion!), dass unsere Wellen einen eindeutigen Schwerewellencharakter haben.

Relativ deutlich konnten wir jedoch zeigen, dass der Kapillarwellencharakter unserer Wellen verschwindend gering ist. Zum einen weisen unsere Wellen eine normale Dispersion auf. Zum anderen hatten weder eine Veränderung der Oberflächenspannung (Seife) noch eine Veränderung der Dichte einen erkennbaren Einfluss auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen.

Anscheinend befinden wir uns aber mit unseren Wasserpegeln von ca. 6,5 - 7,5cm immer noch in einem Bereich in dem die Beziehung für Flachwasserwellen noch nicht ganz vernachlässigt werden kann. So ergibt sich (in unserer Formel für die Dispersion erkennbar) doch ein Einfluss des Flachwasserwellenfaktors von ein paar Prozent. In der Messung mit zwei verschiedenen Wasserhöhen ist dieser Effekt jedoch zu gering um ihn deutlich nachzuweisen, dazu bedarf es wohl längerer Messreihen mit besseren Mittelwerten.

## Literatur

- [1] Gerthsen Physik, Vogel H., 18. Auflage, Springer-Verlag 1995
- [2] Physik I, Dransfeld K., 9. Auflage, Oldenbourg 2001
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Wasserwelle> zuletzt aufgerufen am 2.11.05